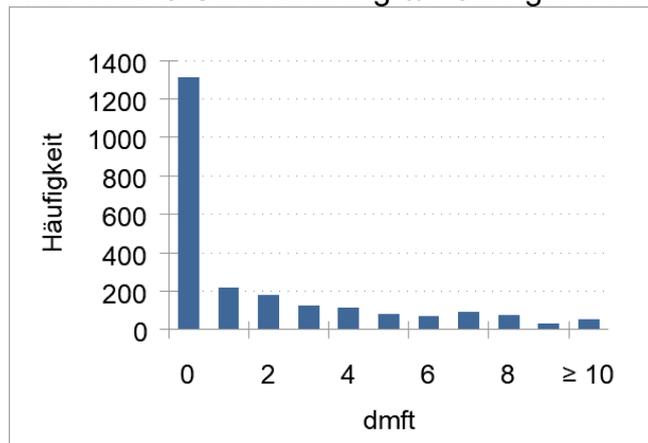


## Funktionelle Anpassung von Lorenzkurven der Karieskonzentration für Kinder (6/7-Jährig) mit Karieserfahrung (dmft > 0)

Milchzähne von Erstklässlern (6/7-Jährige) werden bei kariesepidemiologischen Erhebungen in Deutschland häufig untersucht. Die Klassierung der ermittelten ganzzahligen dmft-Werte ergibt eine allgemein bekannte Häufigkeitsverteilung der Karies. Grafische Darstellungen oder Tabellen beziehen sich mitunter nur auf die dmft-Klassen von Null bis Zehn (Abb. 1). Wenige Werte dmft > 10 werden der Klasse 10 zugeschrieben [1].

Abb. 1: DAJ-Untersuchung 6/7-Jähriger im Bundesland Hessen 2016



Aus diesen Häufigkeitsverteilungen errechnen sich geschätzte dmft-Mittelwerte, aber auch die Koordinaten der Lorenzkurven und die Gini-Koeffizienten zur Quantifizierung der Konzentration der Karies. Bezieht man die dmft-Summe der untersuchten Population nur auf die Anzahl der Kinder mit Karieserfahrung (KE), d.h., solchen mit dmft-Werten größer als Null, so ergibt das den neuerdings eingeführten SaC-Index [2]. Die Betrachtung dieser Teilpopulation ist von großem Interesse, da durch sie Umfang und ggf. Entwicklung der Karies bei den von Karies betroffenen Kindern (Kinder mit KE) charakterisiert wird. Tab. 1 liefert hier das Rechenschema für den SaC-Index, die Koordinaten der Lorenzkurve  $L(x)$  und den Gini-Koeffizient am Beispiel der DAJ-Daten 2016 [1] für 6/7-Jährige des Bundeslandes Hessen.

[Tab. 1 Rechenschema für DAJ-Daten 6/7-Jähriger im Bundesland Hessen 2016](#)

dmft	Kinder h	rh	Lorenz x-Achse krh=uj	Zahl kari Zähne dmf*h	Anteil kari Zähne rhZ	Lorenz y-Achse krhZ=vj	$h_j * (v_j + v_{j-1})$
			0.0000			0.0000	
1	214	0.21	0.2117	214	0.0516	0.0516	11.0458
2	178	0.18	0.3877	356	0.0859	0.1375	33.6594
3	123	0.12	0.5094	369	0.0890	0.2265	44.7677
4	109	0.11	0.6172	436	0.1052	0.3316	60.8360
5	79	0.08	0.6954	395	0.0953	0.4269	59.9264
6	65	0.06	0.7596	390	0.0941	0.5210	61.6136
7	89	0.09	0.8477	623	0.1503	0.6712	106.1088
8	73	0.07	0.9199	584	0.1409	0.8121	108.2851
9	31	0.03	0.9505	279	0.0673	0.8794	52.4368
10	50	0.05	1.0000	500	0.1206	1.0000	93.9701
Summe	1011	1		4146	1		632.6498

**SaC = 4.1009**

**Gini = 0.3742**

Die Koordinaten der Lorenzkurve  $L(x)$  für die Konzentration der Karies erfüllen die Randbedingungen  $L(0) = 0$  und  $L(1) = 1$  und eröffnen damit die Möglichkeit, aus den Wirtschaftswissenschaften bekannte funktionelle einparametrische Lorenzmodelle [3] anzupassen. Eine optimale Anpassung dieser nichtlinearen Funktionen an die empirischen Lorenzkurven (nach Tab. 1) gelingt z.B. mit dem Programm STATA und liefert die Werte für den jeweils gesuchten **Parameter a**, mit dem die Gini-Koeffizienten (Gini-F) berechnet werden können (Tab. 2). Ein Konfidenzintervall für die Gini-Koeffizienten Gini-F erhält man jeweils mittels Substitutionsmethode [4] aus den Konfidenzintervallen für a im Ausdruck von STATA.

**Tab. 2: Einparametrische Lorenzfunktionen  $L(x)$  mit Parameter a und Gini-Koeffizienten**

Quelle	$L(x)$	Gini-F
Gupta	$L(x) = x \cdot a^{(x-1)}$	$G = 1 - \frac{2}{\ln a} \left( 1 - \frac{(a-1)}{a \cdot \ln a} \right)$
Rohde	$L(x) = x \cdot \frac{(a-1)}{(a-x)}$	$G = 2 \cdot a \left\{ (a-1) \cdot \ln \left( \frac{a-1}{a} \right) + 1 \right\} - 1$
Rao-Tam	$L(x) = x^a$	$G = \frac{a-1}{a+1}$
Kakwani-	$L(x) = x \cdot \exp(a \cdot (x-1))$	$G = 1 - \frac{2}{a} \cdot \left( 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a \cdot \exp(a)} \right)$
Podder		
Chotikapanich	$L(x) = \frac{\exp(a \cdot x) - 1}{\exp(a) - 1}$	$G = \frac{(a-2) \cdot \exp(a) + a + 2}{a \cdot (\exp(a) - 1)}$

Notation: Gini-F: Gini-Koeffizienten aus  $G = 1 - 2 \cdot \int_0^1 L(x) dx$

**Beispiel: DAJ-Untersuchung 6/7-Jähriger im Bundesland Hessen 2016**

**Anpassung der Lorenzfunktion Modell Rohde, DAJ Hessen 2016 (6/7)**

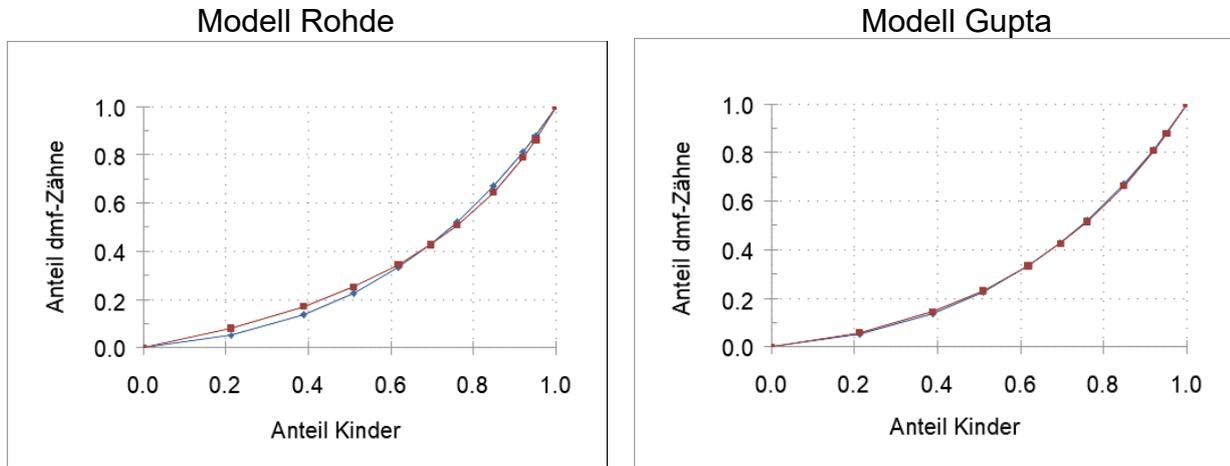
Source	SS	df	MS			
Model	3.5153422	1	3.51534222	Number of obs =	11	
Residual	.00453225	10	.000453225	<b>R-squared</b> =	<b>0.9987</b>	
				Adj R-squared =	0.9986	
				Root MSE =	.0212891	
Total	3.5198745	11	.319988588	Res. dev. =	-54.52211	
yr	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
<b>/a</b>	<b>1.484843</b>	.0267229	55.56	0.000	<b>1.4253</b>	<b>1.544385</b>

**Anpassung der Lorenzfunktion Modell Gupta, DAJ Hessen 2016 (6/7)**

Source	SS	df	MS			
Model	3.5196313	1	3.51963127	Number of obs =	11	
Residual	.00024319	10	.000024319	R-squared =	0.9999	
				Adj R-squared =	0.9999	
				Root MSE =	.0049314	
Total	3.5198745	11	.319988588	Res. dev. =	-86.69862	
yg	Coef.	Std. Err.	t	P> t	[95% Conf. Interval]	
<b>/a</b>	<b>4.995956</b>	.0831647	60.07	0.000	<b>4.810653</b>	<b>5.181258</b>

Mit dem jeweiligen Parameter  $a$  aus dem STATA Ausdruck werden die Koordinaten der Lorenzkurven  $L(x)$  berechnet (rot) und grafisch der empirischen Lorenzkurve (blau) gegenübergestellt. Das Modell Gupta zeigt hier eine deutlich bessere Anpassung.

Abb. 1: Modelle Rohde und Gupta, DAJ Hessen 2016 (6/7-Jährige)



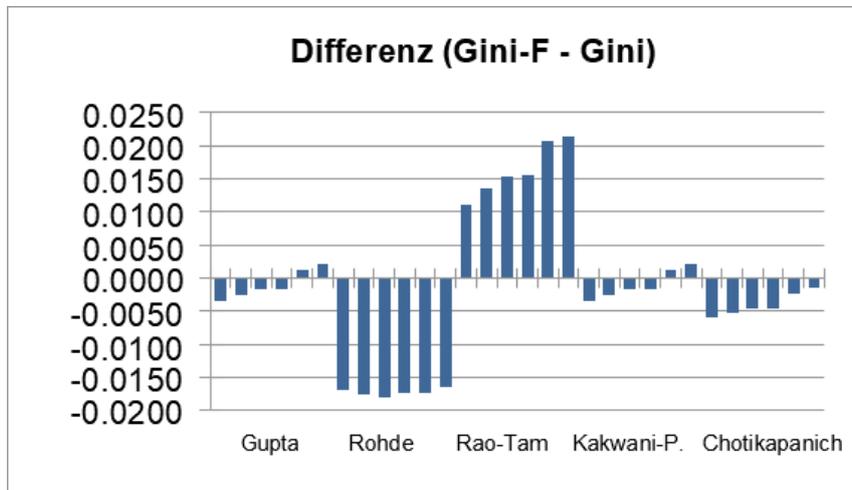
In der folgenden Tab. 3 sind die berechneten Parameter ( $a$ ) für 5 Lorenzmodelle [3] aus den Daten der DAJ [1] aller beteiligten Bundesländer der Jahre 1997, 2000, 2004, 2009 und 2016 aufgeführt (139.246 Erstklässler). Die Clusterstruktur der Daten (Bundesländer) wurde hier nicht berücksichtigt. Alle Modelle zeigen eine sehr gute Anpassung an die empirische Lorenzkurve, wobei die Modelle **Gupta** und **Kakwani-Podder** für die hier verwendeten DAJ-Daten am besten abschneiden.

Tab. 3: Ergebnisse der Kurvenanpassung für 5 Modelle

Modell	Jahr	R <sup>2</sup>	Parameter	95%-K.I.		Gini-F	95%-K.I.		Gini
			a	unten	oben		unten	oben	
Gupta	1997	0.9998	4.3412	4.1055	4.5769	0.3519	0.3423	0.3607	0.3544
Gupta	2000	0.9999	4.6418	4.4156	4.8680	0.3630	0.3547	0.3707	0.3647
Gupta	2004	1	4.5847	4.3707	4.7986	0.3610	0.3530	0.3684	0.3625
Gupta	2009	1	5.1103	4.9787	5.2419	0.3785	0.3743	0.3825	0.3773
Gupta	2016	1	5.0878	4.9598	5.2158	0.3778	0.3737	0.3817	0.3757
Rohde	1997	0.9985	1.5406	1.4679	1.6134	0.3368	0.3126	0.3653	0.3544
Rohde	2000	0.9985	1.5136	1.4460	1.5813	0.3468	0.3228	0.3749	0.3647
Rohde	2004	0.9989	1.5181	1.4512	1.5849	0.3451	0.3216	0.3725	0.3625
Rohde	2009	0.9989	1.4804	1.4260	1.5347	0.3600	0.3389	0.3841	0.3773
Rohde	2016	0.9991	1.4820	1.4300	1.5340	0.3593	0.3392	0.3822	0.3757
Rao-Tam	1997	0.9995	2.1638	2.0856	2.2420	0.3678	0.3518	0.3831	0.3544
Rao-Tam	2000	0.9995	2.2255	2.1430	2.3079	0.3799	0.3637	0.3954	0.3647
Rao-Tam	2004	0.9992	2.2146	2.1312	2.2981	0.3778	0.3613	0.3936	0.3625
Rao-Tam	2009	0.9992	2.3212	2.2167	2.4257	0.3978	0.3783	0.4162	0.3773
Rao-Tam	2016	0.9992	2.3167	2.2047	2.4287	0.3970	0.3759	0.4167	0.3757
Kakwani-P.	1997	0.9998	1.4682	1.4138	1.5225	0.3519	0.3426	0.3609	0.3544
Kakwani-P.	2000	0.9999	1.5351	1.4864	1.5838	0.3630	0.3549	0.3709	0.3647
Kakwani-P.	2004	1	1.5227	1.4761	1.5694	0.3610	0.3532	0.3686	0.3625
Kakwani-P.	2009	1	1.6313	1.6055	1.6570	0.3785	0.3744	0.3825	0.3773
Kakwani-P.	2016	1	1.6269	1.6017	1.6520	0.3778	0.3738	0.3817	0.3757
Chotikapanich	1997	0.9997	2.2682	2.1702	2.3662	0.3491	0.3362	0.3619	0.3544
Chotikapanich	2000	0.9997	2.3524	2.2609	2.4438	0.3601	0.3482	0.3718	0.3647
Chotikapanich	2004	0.9997	2.3369	2.2485	2.4254	0.3581	0.3465	0.3694	0.3625
Chotikapanich	2009	0.9999	2.4701	2.4088	2.5314	0.3751	0.3673	0.3828	0.3773
Chotikapanich	2016	0.9999	2.4648	2.4093	2.5203	0.3744	0.3674	0.3814	0.3757

Nach Differenzbildung der funktionell berechneten Gini-Koeffizienten "Gini-F" und der tabellarisch (Trapezmodell) ermittelten Werte "Gini" und grafischer Darstellung sind die beiden favorisierten Modelle **Gupta** und **Kakwani-Podder** ebenfalls deutlich sichtbar.

Abb. 2: Modellvergleiche



[1] Epidemiologische Begleituntersuchungen zur Gruppenprophylaxe 1997 - 2016. DAJ. <https://daj.de/gruppenprophylaxe/epidemiologische-studien>

[2] Schmoeckel J. et al. Caries Research 2019;53:527-531

DOI: 10.1159/000496932

[3] Rohde, N. "An alternative functional form for estimating the Lorenz curve," Economics Letters, Elsevier, vol. 105(1), (2009), 61-63.

[4] Altman DG et al. Statistics with confidence. BMJ Books, 2. Ed. (2011)